

2019年秋季加州UCLA交流小结

2020-06-17 21:07:18

很幸运能够入选2019年秋季加州交流的机会，使我得以在UCLA交换学习三个月。这三个月中，我主要参与了三门课程，一门是本科学生的复分析(Math 132)，一门是本科学生的代数荣誉课程(Math 110AH)，另一门是研究生的数论课程(Math 205)，我还旁听了另一门研究生数论课程(Math 207)。我将主要时间花在了后面三门课程中，尤其是两门研究生数论课程。Math 205由数论学界久负盛名的教授Haruzo Hida来教，主要内容是他自己写的书《L函数和爱森斯坦级数的基础理论》的前三章。课程的前半段，Hida从历史的发展循序渐进地讲解了L函数的各种研究方法，如利用留数定理来导出著名的函数方程，某些特殊点的取值，及取值的整性定理。课程的后半段，Hida引入了p-adic L函数。他详细地讲解了该类定义于p-adic数之上的亚纯解析函数。这类函数最初的引入是由于数学家们观测到了伯努利数——它与L函数在特殊点的取值密切相关——之间的同余关系，从而引发了对这种函数存在性的猜测，并最终被证明这是一种解析函数，即可用幂级数进行展开。其中最吸引我的理论之一在于在p-adic空间中的测度空间与Iwasawa代数（一个幂级数环）之间的同构，即一个幂级数展开的形式即对应了一个测度，这两者之间的联系居然如此紧密！这一结论也在Math 207中得到了很多应用。这门课尤其令我印象深刻的是两个公式，他们都是L函数在点 $s=1$ 处的取值公式，不过一个是在通常的复数域上的函数，另一个则是复p-adic域上的函数。从形式上来说，这两个公式实在是太过一致，尽管p-adic L函数本质上来源复数域上的L函数，但这种一致性还是惊人的。Math 205这门课的期末考试是通过课堂展示的形式，即每个人挑选一个话题，并阅读这方面的文献，最后给全部的同学做一个课堂展示。对于本科生来说，可以在课堂展示与做练习题之间选择一种，我选择了课堂展示。Hida教授给我推荐了一个不错的话题，Kronecker Limit Formula，即克罗内可极限公式。我首先阅读了新谷卓郎在1972年的论文，之后又找到了Zagier的论文。从内容上来说，该公式是想寻找L函数在 $s=1$ 处展开式的零次项。众所周知，L函数最著名的一个性质在于其在 $s=1$ 处展开式的留数与理想类的选取无关，因此知道零次项之后即可对任意的理想类L函数 $s=1$ 处的值进行计算。对于一般数域而言，这个工作并不简单，因为在某些求和项时需要考虑单位的选取，但对于虚二次域来说，整数环的单位群是一个有限群，因此计算相当简单，历史上克罗内可第一次计算了它。这是我本来的想法。直到一次我与Hida教授当面交流时这一想法才终于改变。Hida教授先是让我回忆了他课上教的两个公式，在这两个公式中，都涉及到了对对数函数（复数域上、p-adic域上）在某些特殊函数值处的取值的求和。因此克罗内可猜想对一般的数域，这一形式也是对的，即需要找到某种函数，复合上对数函数并求和，即可得到想要的取值公式。克罗内可计算了最简单的情形，即虚二次域的情形，发现这一结论完全正确，而且想要的函数是数值的Dedekind eta函数，一种常见的模形式。后来又有了对于实二次域计算的情形，这一情形稍微复杂，因此在该情形下有了秩为1的单位，普通的求和比较困难，因为代表元的选取十分繁琐。但这依旧是除二次域外最简单的情形。其最后的形式中出现了个对数eta函数的积分，这一积分是难以控制的，这也是实二次域数域的问题所在。Math 205这门课让我受益良多，此前我对L函数几乎处于无知的状态，书籍中对于其的处理手法也多种多样难以归类。Hida的课程则让我对其的认识更加明朗了一些，尤其是Hida教授对于计算的认真，他每次都要一步步地完成每一步的计算，尽管在很多时候这些工作都是非常平凡的。Hida也是一个热情的人，他喜欢与人聊天，我在临走之际又问了他很多关于数论学习的问题，他鼓励我对于数论的热情，也期待我在算术几何的道路上继续走下去。他最后送了我一本他写的书，这本书主要叙述了几何模形式与费马大定理的最后证明。我还认真地参与了代数荣誉课程，这是由著名数论学家Chandrashekar Khare讲授的。Khare教授是Hida教授之前在加州理工的学生，他与他的合作者一同证明了塞尔模性定理。这一定理的弱形式在费马大定理的证明中起了举足轻重的作用。Khare的课程是基本的抽象代数，由群讲起，最后讲到西罗定理，这也差不多是在国内的抽象代数讲解顺序。但Khare讲课与国内老师讲课不尽相同，他更喜欢从例子讲起，进而介绍一般的定义，及相应的定理。相比之下，国内的课程则直接从定义讲起，定理，推论，等等。对于例子的讲解一般放在定义之后，或者由同学自行学习。但Khare讲课的方式更为缓慢，讲的内容较少，国内的教课方式则可以覆盖更多发内容，我说不出来这两种授课方式哪种更优，但对于水平一般的同学而言，Khare的方式无疑更好，能够帮助同学理解概念。而对于资质优异、自学意愿强烈的同学来说，国内的方式或许更优。因为例子的内容完全可以由同学自行阅读并理解。我在离开之前，也去找Khare教授聊了聊天。他是印度人，英语带有口音，语速较快。但一学期的适应已经让我习惯了这一说话方式。我向他咨询了关于数论学习的内容，以及算术几何的方向。他向我推荐了几本他认为不错的代数几何与数论的教材。我还问了问他关于我的本科生毕业论文的事情，他向我推荐了一个话题，即Herbrand-Ribet定理，这是关于分圆域算术的一个定理，我正好的学习这方面的知识，因此或许这将是一个不错的话题。在UCLA的三个月中，我将绝大多数的时间奉献给了学习，我所选的三门课都获得了满绩的成绩。这是我第一次在异国他乡生活这么长的时间，我深入地体验了洛杉矶的氛围。这是一座热情的城市，靠着海，从我所住的楼层可以看到圣莫妮卡海滩。UCLA的校园也十分美丽，它依山而建，从宿舍楼走到数学楼需要先下山再上山，每一次都让我的双腿痛苦不已，但也着实为减肥工作贡献一分力量。这里的食堂是资助餐制，虽说UCLA的食堂被评为全美第一的食堂，但吃久了还是会怀念国内的食物。这就是我这三个月来的经历，UCLA是一所数论方向十分强劲的学校，其数论小组也是全世界最有名的小组之一，十分期待在以后还有机会再次来此地交流。